\documentclass[11pt, twocolumn]{article}

\usepackage[russian]{babel}

\usepackage[utf8]{inputenc}

\begin{document}

Рис. 2. В $N$ имеется всего $2^4$ подмножеств: $C^0\_4 = 1$ 0-подмножество

$C^1\_4 = 4$ подмножества,

$C^2\_4 = 6$ подмножеств,

$C^3\_4 = 3$ подмножеств,

$C^4\_4 = 1$ подмножество (все множество $N$).

Обозначим число $k$-подмножеств в множестве из $n$ элементов через $C^k\_n$

Числа $C^k\_n$ (их называют биномиальными коэффициетами) обладают целым рядом любопытных свойств. О многие из них было рассказано в статье Д.Б. Фукса и М.Б. Фукса «Арифметика биномиальных коэффициентов» («Квант», №6, 1970). В этой статье было доказано, что

$C^k\_n = C^k-1\_n-1 + C^k\_n-1, (1)$

и с помощью метода математической индукции получена формула для $C^k\_n$:

$C^k\_n$ =

Оба утверждения были выведены из равенства [], но их можно доказать и комбинаторными рассуждениями.

Чтобы доказать, например, равенство (1), зафиксируем один элемент $a$ из $ N $ и разобьем все $ k $-подмножества в $ N $ на два класса: содержащие $a$ и не содержащие $a$. ПроверьтеЮ что число подмножеств первого класса равно $C^k-1\_n-1$, а число подмножеств второго класса равно $C^k\_n-1$. Так как каждое $k$-подмножество принадлежит либо первому, либо второму классу, общее число всех $k$-подмножеств равно $C^k\_n$, то равенство (1) доказано.

Чтобы вывести формулу (2), выясним сначал, как получаются $k$-подмножества из $(k - 1)$-подмножеств. Ясно, что для этого надо к $(k - 1)$-подмножествам присоединить не входящие в них элементы. Так как все множество $N$ содержит $n$ элементов, то в данное $(k - 1)$-подмножество не входит $n - (k - 1)$ элементов. Значит, из каждого $(k - 1)$-подмножества можно получить $n - k + 1$ различных $k$-подмножеств. Но одно и то же $k$-подмножество может быть получено из различных $(k - 1)$-подмножеств - мы не знаем, какой из $k$ элементов оказался присоединенным в последнюю очередь. Иными словами, любое $k$-подмножество может быть получено $k$ различными способами из $(k - 1)$-подмножеств. Поэтому общее число $k$-подмножеств в $k$ раз меньше, чем $(n - k +1) C^k-1\_n$. Итак,

$C^k-1\_n-1$.

Пользуясь этой формулой и методом математической индукции, легко доказать и формулу (2).

3. $k$-слова. Снова возьмем в руки мешок с элементами множества $N$, но на этот раз будем вытаскивать элементы не сразу, а по очереди. Сначала вынем один элемент, обозначим его $a\_1$, запишем и положим обратно в мешок. Потом вытащим второй элемент (может случиться, что нам снова попадется тот же самый элемент $a\_1$), запишем его и т.д. После $k$ выборов у нас получится запись вида ($a\_1$,...,$a\_k$), где $a\_1$,...,$a\_k$ какие-то элеметы из множества $N$. Такую запись мы назовем словом длины $k$ или $k$-словом (иначе ее называют кортежем), составленным из элементов множества $N$.

Два $k$-слова считаются совпадающими, если у них одинаковые первые элементы, одинаковые вторые элементы, одинаковые $k$-е элементы.

С $k$-словами мы часто встречаемся на практике. Например, десятичные записи чисел - это "слова", составленные из 10 цифр, обычные слова - это "слова", составленные из русских слов. Решим следующую задачу.

Дано множества $N$, состоящее из $n$ элементов. Сколько $k$-слов можно составить из элементво этого множества?

Поскольку первый элемент можно выбрать $n$ способами, второй тоже $n$ способами,..., $k$-ый тоже $n$ способами, то $k$-слово можно выбрать $n^k$ способами.

Окончательно: из $n$ элементов можно составить $n^k$ слов длины $k$.

Многие комбинаторные задачи решаются по этому правилу. Найдем, например, сколькими способами можно разделить $k$ различных предметов между $n$ людьми. Для этого расположим элементы в каком-то порядке и над каждым предметом укажем, кому он предназначается. Например, запись

[]

показывает, что первому участнику раздела достанутся 1-й, 2-й, 6-й, 10-й предметы, второму 4-й, 5-й, 7-й, а третьему 3-й, 8-й, 9-й предметы.

Мы видим, что каждый способ раздела задается $k$-словом (где $k$ - число предметов) из $n$ элементов (номеров участников раздела)ю Значит, число способов раздела равно $n^k$.8gc

\end{document}